m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

5. Василян М.А. О проективно-дифференциальной геометрии однопараметрических гиперполос // Дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. С.38-45.

6. Шейдерова Н.М. К теории одномерных регулярных гиперполос проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1982. Вып.13. С.118-124.

7. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

8. Балазюк Т.Н. Дифференциальная геометрия m-мерных линейных элементов, оснащенных конусом. I / ВИНИТИ АН СССР. М., 1978. 35 с. Деп. в ВИНИТИ 24.01.78. № 267-78 Деп.

9. Норден А.П., Тимофеев В.Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств // Изв. вузов. Математика, 1972. № 8. С.81-89.

10. Домбровский Р.Ф. О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,r}$ в P_n // Всес. конф. по неевклид. геометрии "150 лет геометрии Лобачевского": Тезисы докл. Казань, 1976. С.69.

11. Попов Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(k))$-распределением проективного пространства. II / Калинингр. ун-т. Калининград, 1984. 36 с. Библиогр. 8 назв. Деп. в ВИНИТИ 9.01.85. № 252 - 85 Деп.

12. Попов Ю.И. Трехсоставные распределения проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.65-86.

13. Cartan E., Les espaces a connection projective // Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу. М., 1937. Т.4. С.147-159.

14. Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.71-120.

УДК 514.75

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПАРЫ Т КОНГРУЭНЦИЙ, У КОТОРЫХ РАВНЫ МЕЖДУ СОБОЙ ПРОИЗВЕДЕНИЯ АБСЦИСС ФОКУСОВ

О.С.Редозубова

(Московский государственный педагогический университет)

Рассматриваются свойства специальных пар Т конгруэнций в E_3, у которых равны между собой произведения абсцисс соответствующих фокусов. Специальными парами Т конгруэнций названы такие пары Т, у которых общий перпендикуляр соответствующих прямых пары перпендикулярен общему перпендикуляру пары дополнительных конгруэнций. Такие пары обозначены буквой T' [1].

К конгруэнции присоединен ортонормированный репер $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, вершина которого $O \in \tau$ ($\{\tau\}$ - конгруэнция общих перпендикуляров пар T' конгруэнций $\{\tau_a\}$ $(a=1,2)$, $\vec{e}_3 \parallel \tau$. Соответствующие прямые пары τ_a образуют с вектором $\vec{e}_1$ углы α_a. Прямые τ пересекают τ_a в точках K_a. По отношению к реперу $(O, \vec{e}_3)$ на прямой τ точки имеют координаты h_a. Направляющие векторы прямых τ_a есть орты

$$\vec{\eta}_a = \vec{e}_1 \cos\alpha_a + \vec{e}_2 \sin\alpha_a .$$

Фокусы прямых τ_a есть точки F_a и F'_a. Абсциссы фокусов относительно реперов $(K_a, \vec{\eta}_a)$ есть соответственно ρ_a и ρ'_a.

В соответствии с работой [1] специальные пары Т конгруэнций определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} Q_1 = \Omega_{13} \dfrac{t\rho_1\rho_1'}{h_1 - h_2}, \quad Q_2 = \Omega_{23} \dfrac{t\rho_1\rho_1'}{h_1 - h_2}, \quad \rho_2 = t\rho_1, \ \rho_2' = t\rho_1' \ (t \neq 0), \\ A_1 = \Omega_{13} \dfrac{t(\rho_1 + \rho_1')}{h_1 - h_2} + H_1 t, \quad A_2 = \Omega_{23} \dfrac{\rho_1 + \rho_1'}{h_1 - h_2} + H_2 \dfrac{1}{t}. \end{cases} \qquad (1)$$

Произвол существования таких пар - одна функция двух аргументов. Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Omega_a = \omega^1 \cos\alpha_a + \omega^2 \sin\alpha_a, \quad \Omega_a^* = \omega^1 \sin\alpha_a - \omega^2 \sin\alpha_a,$$

$$\Omega_{a3} = \omega_1^3 \cos\alpha_a + \omega_2^3 \sin\alpha_a, \quad \Omega_{a3}^* = -\omega_1^3 \sin\alpha_a + \omega_2^3 \cos\alpha_a,$$

$$A_a = \frac{\omega_1^2 + d\alpha_a}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad H_a = \frac{\omega^3 + dh_a}{h_1 - h_2}, \quad Q_a = \frac{\Omega_a^* + h_a \Omega_{a3}^*}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Т е о р е м а I. Пары T' конгруэнций с равными произведениями абсцисс фокусов есть такие пары, которые пересечены в центрах прямыми конгруэнции их общих перпендикуляров. Произвол существования таких пар T'' – четыре функции одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. К системе уравнений (I), определяющей пары T' конгруэнций, надо присоединить условие $\rho_1\rho_2 = \rho_1'\rho_2'$. Подставляя сюда $\rho_2 = t\rho_1$, $\rho_2' = t\rho_1'$, получим $\rho_1' = -\rho_1$, $\rho_2' = -\rho_2'$, $t = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_2'}{\rho_1'}$, $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$. В результате имеем следующую систему уравнений:

$$Q_{a3} = -\Omega_{a3}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}, \quad A_a = H_a\frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \rho_a' = -\rho_a. \qquad (2)$$

После дифференцирования уравнений системы (2) внешним образом и подстановки туда выражений A_a, Q_a из этой системы получим четыре независимых квадратичных уравнения с неизвестными функциями H_a, $d\rho_a$. Исследование системы уравнений приводит к выводу о том, что рассматриваемые пары существуют с произволом четырех функций одного аргумента. Из полученных равенств $\rho_a' = -\rho_a$ имеем, что прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые пары в их центрах.

Т е о р е м а 2. Пары T конгруэнций с равными произведениями абсцисс соответствующих фокусов являются парами T' конгруэнций тогда и только тогда, когда каждая из соответствующих прямых пары образует равные углы с фокальными плоскостями, проходящими через соответствующую прямую пары.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для пары T конгруэнций $\vec{n}_a$ и $\vec{n}_a'$ есть векторы нормалей фокальных поверхностей F_a, F_a' соответственно прямых τ_a. Косинусы углов, образуемых прямыми τ_a с векторами нормалей фокальных поверхностей, имеют вид:

$$\cos(\vec{\eta}_1, \vec{n}_2) = -\frac{(h_1-h_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{(h_1-h_2)^2 + (\rho_1)^2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}},$$

$$\cos(\vec{\eta}_2, \vec{n}_1) = \frac{(h_1-h_2)\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sqrt{(h_1-h_2)^2 + (\rho_2)^2\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}}.$$

Косинусы двух других углов $(\vec{\eta}_1, \vec{n}_2')$ и $(\vec{\eta}_2, \vec{n}_1')$ получаются из них заменой ρ_1, ρ_2 соответственно, на ρ_1', ρ_2'. Если пара T конгруэнций с равными произведениями абсцисс фокусов является специальной (T'), то по теореме I $\rho_1' = -\rho_1$, $\rho_2' = -\rho_2$.

Тогда получим, что

$$\cos(\vec{\eta}_1, \vec{n}_2) = \cos(\vec{\eta}_1, \vec{n}_2'), \qquad \cos(\vec{\eta}_2, \vec{n}_1) = \cos(\vec{\eta}_2, \vec{n}_1').$$

Таким образом, прямая τ_1 образует равные углы с фокальными плоскостями прямой τ_2, а прямые τ_2 – равные углы с фокальными плоскостями, проходящими через τ_1.

2. Если прямые пары образуют равные углы с фокальными плоскостями, проходящими через соответствующие прямые, то $\rho_1' = -\rho_1$, $\rho_2' = -\rho_2$. Имеем $\rho_1\rho_2 = \rho_1'\rho_2'$, поэтому $\rho_1'\rho_2 = \rho_1\rho_2'$, и, следовательно, пара T является парой T' конгруэнций с равными произведениями абсцисс фокусов (т.е. парой T'').

Т е о р е м а 3. У пар T'' конгруэнций равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых пар дополнительных конгруэнций, а также углы между фокальными плоскостями, проходящими через эти прямые.

Т е о р е м а 4. Пары T' конгруэнций с равными произведениями абсцисс фокусов, у которых равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, есть такие пары, у которых прямые конгруэнции общих перпендикуляров пар дополнительных конгруэнций пересекают в центрах соответствующие прямые этой пары.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если у пар T'' конгруэнций, определяемых системой уравнений (2), равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, то $\rho_1' - \rho_1 = \rho_2' - \rho_2$. Тогда из равенства $\rho_1\rho_2 = \rho_1'\rho_2'$ имеем $\rho_1 = \rho_2$, а также $\rho_1' = \rho_2'$. Такие пары являются парами I-го типа и в соответствии с теоремой 3 [I] прямые конгруэнции общих перпендикуляров пар дополнительных конгруэнций пересекают соответствующие прямые в центрах.

Можно доказать, что такие пары существуют с произволом трех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 5. У пары $\tilde{T}'$ конгруэнций с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые в их центрах тогда и только тогда, когда таким же свойством обладают соответствующие прямые дополнительной конгруэнции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пары $\tilde{T}'$ конгруэнций в случае, когда прямые конгруэнции их общих перпендикуляров пересекают эти прямые в центрах, определяются системой (I), к

которой надо присоединить $A_1 = A_2 \equiv A$, $H_1 = H_2 \equiv H$. Получим $t^2 = 1$ и, следовательно, $t = 1$ (или $t = -1$). Тогда $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1' = \rho_2'$. Видно, что равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых пары и по теореме 3 из [1] прямые конгруэнции общих перпендикуляров пар дополнительных конгруэнций пересекают соответствующие прямые этой пары в центрах.

2) Если у пар $\tilde{T}'$ конгруэнций прямые конгруэнции общих перпендикуляров пар дополнительных конгруэнций пересекают соответствующие прямые в центрах, то по теореме 3 из [1] эти прямые есть пары I-го типа и тогда $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1' = \rho_2'$. В этом случае в системе уравнений (I):

$$A = \Omega_{13} \frac{\rho_1 + \rho_1'}{h_1 - h_2} + H, \qquad A = \Omega_{23} \frac{\rho_1 + \rho_1'}{h_1 - h_2} + H.$$

Приравнивая правые части, в силу независимости Ω_{a3} получим $\rho_1 + \rho_1' = 0$, $\rho_2 + \rho_2' = 0$, откуда следует, что прямые конгруэнции общих перпендикуляров пары T'' конгруэнций пересекают эти прямые в центрах.

Заметим, что рассмотренные пары имеют равные произведения абсцисс фокусов.

Т е о р е м а 6. Если из трех нижеуказанных требований на соответствующие прямые пары T'' конгруэнций выполнены два требования, то имеет место и третье: а) фокальные расстояния соответствующих прямых пары конгруэнций равны между собой; б) постоянно расстояние между соответствующими прямыми; в) постоянен угол между соответствующими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Пары T'' конгруэнций определяются системой уравнений (2). Если предположить, что выполнены условия а) и б), то $\rho_1 = \rho_2$, $h_1 - h_2 = const$, т.е. $H_1 = H_2 \equiv H$. Тогда из системы уравнений (2) имеем:

$$A_1 - A_2 = H_1 \frac{\rho_2}{\rho_1} - H_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} = H \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_1 \rho_2} = 0,$$

откуда $A_1 = A_2 \equiv A$. Следовательно, постоянен угол между соответствующими прямыми, т.е. выполнено условие в).

2) Предположим, что выполнены условия а) и в). Тогда $A_1 = A_2 \equiv A$, $\rho_1 = \rho_2$. Из первых двух уравнений системы (2) имеем: $H_1 = H_2$, т.е. выполнено условие б).

3) Допустим, что выполнены условия б) и в). Тогда имеем

пару конгруэнций $\tilde{T}'$. Такие пары определены системой уравнений (I) при условиях $A_1 = A_2$, $H_1 = H_2$. Тогда имеем $\rho_1 = \rho_2$, $\rho_1' = \rho_2'$. Следовательно, выполняется условие равенства фокальных расстояний соответствующих прямых пары.

Библиографический список

I. Р е д о з у б о в а О.С. Пары Т конгруэнций с данным расположением конгруэнции общих перпендикуляров // Дифференциальная геометрия многообразий фигур : Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1990. Вып.21. С.86-90.

УДК 514.76

О ПРОЕКТИВНЫХ СУБМЕРСИЯХ И ИММЕРСИЯХ В ЦЕЛОМ

С.Е.С т е п а н о в

(Владимирский педагогический институт)

Локальная теория проективных диффеоморфизмов изложена в известной монографии [1]. В последнее время, развивая локальную теорию проективных отображений, авторы сняли требования равенства размерностей в отображении многообразий [2], [3] и, более того, ограничение на ранг отображения [4]. В настоящей работе рассматривается глобальный аспект новой теории, намеченный нами в статье [5].

1. Пусть (M, g) – риманово многообразие размерности n со связностью Леви-Чивита ∇. Гладкий путь $\gamma : J \subset R \to (M, g)$ называется геодезической, если его касательное векторное поле $\dot{\gamma}$ параллельно, т.е. $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$. Из определения следует, что либо геодезическая регулярна во всех своих точках, т.е. $\dot{\gamma} \neq 0$, либо геодезическая вырождается в точку. Предгеодезической называется гладкий путь γ, который параметризацией может быть сделан геодезической.

Полагаем (M', g') римановым многообразием размерности n' со связностью Леви-Чивита ∇'. Гладкое отображение $f : (M, g) \to (M', g')$ называется проективным, если для каждой предгеодезической γ многообразия (M, g) ее образ $f(\gamma)$ будет предгеодезической многообразия (M', g').

Пусть $n' < n$, а в качестве гладкого проективного отобра-